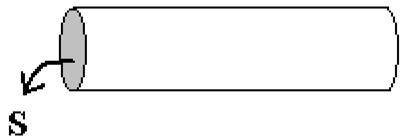
Elementos de Circuitos Elétricos

- **Corrente e Lei de Ohm**

Consideremos um condutor cilíndrico de seção reta de área *S*.



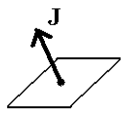
Quando uma corrente flui pelo condutor, cargas se movem e existe um campo elétrico.

A corrente elétrica *I* é a quantidade de carga passando por um dado ponto por unidade de tempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$ (a unidade de *I* é o ampère = coulomb/segundo).

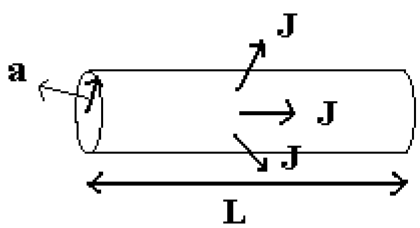
Como o condutor é um objeto extenso, cada ponto seu pode ter um valor diferente de corrente com uma direção de propagação diferente.

Por esta razão, define-se o *vetor densidade de corrente* **J**, que dá o valor e a direção da corrente passando por uma pequena superfície plana em torno de um ponto (a superfície é definida de maneira que a sua normal coincida com a direção da corrente máxima no ponto):



(A unidade de **J** é A/m^2)

Por exemplo, se corrente estiver escapando radialmente pela superfície do condutor, teremos um valor diferente de **J** para cada ponto.



Se o <u>módulo</u> de **J** for o mesmo para cada ponto da superfície, então podemos multiplicar o módulo de **J** pela área total da superfície do cilindro para obtermos a corrente total fluindo através da superfície:

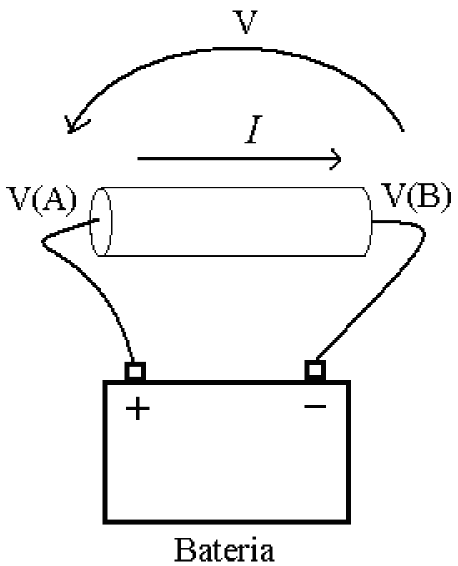
$$I = (2\pi a L)J.$$

A partir de **J** define-se outra grandeza, a corrente por unidade de comprimento:

$$K = \frac{I}{L} = (2\pi a)J.$$

Se não houver campo elétrico no interior do condutor, o movimento médio de cargas será nulo. Haverá movimento térmico aleatório, o qual será igualmente provável em todas as direções e não gerará um efeito global coordenado. Esse movimento aleatório é uma das fontes de ruído em circuitos elétricos.

Se houver corrente e, portanto, campo elétrico, deve haver uma diferença de potencial entre dois pontos do condutor.



Seja V = V(A) − V(B) a diferença de potencial entre as extremidades do fio. Por convenção, a diferença de potencial entre os dois lados de um componente de um circuito elétrico é representada por uma flecha curva com sua ponta colocada no lado positivo da diferença de potencial (veja a figura acima). A corrente I é uma função dessa voltagem, $I = I(V)$. Na maioria dos casos, I é simplesmente proporcional a V:

$$I = \frac{V}{R} = GV.$$

Esta é a Lei de Ohm. A constante R é denominada *resistência elétrica* do condutor (sua unidade é o ohm, Ω). A grandeza $G = 1/R$ é denominada *condutância elétrica* do condutor (sua unidade é o siemens, S). Por convenção, a direção positiva de corrente elétrica é que cargas positivas livres teriam se fossem colocadas entre os dois pólos da bateria, ou seja, do pólo positivo para o negativo (veja a figura acima).

- **Resistência e Resistividade**

Se o condutor tiver comprimento L e área de seção reta A, a sua resistência será dada por,

$$R = \rho \frac{L}{A},$$

onde ρ é denominada *resistividade elétrica* do material que constitui o condutor. A sua unidade é Ωm. A inversa de ρ é a *condutividade elétrica* do material, denotada por σ, com unidade S/m.

A condutividade σ e a resistividade ρ são <u>propriedades materiais</u> de uma dada substância, que não dependem das dimensões do condutor.

Combinando as equações vistas: $$V = RI = \rho \frac{LI}{A} = \rho LJ \Rightarrow J = \sigma \frac{V}{L}.$$

Lembrando que $V = EL$, podemos re-escrever a lei de Ohm como:

$$J = \sigma E \, .$$

Esta forma de se escrever a lei de Ohm é muito útil, pois não envolve grandezas que dependem da geometria do condutor.

A partir da equação que dá a resistência de um pedaço de condutor de comprimento L e área de seção reta A, $R = \rho L/A$, define-se duas grandezas *específicas* de um condutor:

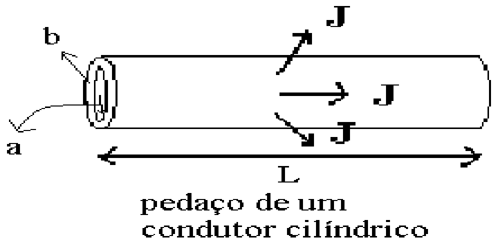
- Resistência por unidade de comprimento: $r = \dfrac{R}{L} = \dfrac{\rho}{A}$ (unidade: Ω/m)

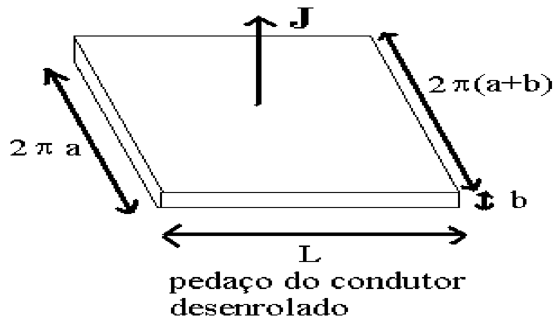
- Resistência de uma área unitária: $\Re = RA = \rho L$ (unidade Ωm^2).

r é uma resistência específica para um condutor unidimensional. Por exemplo, para um fio metálico (que pode ser visto como unidimensional) de material e calibre conhecidos, se quisermos uma dada resistência basta especificar o comprimento do fio.

$\Re$ é uma resistência específica para um condutor bi-dimensional. Por exemplo, para um condutor cilíndrico de raio a e comprimento L feito de um material com resistência de área unitária $\Re$, a resistência da superfície à passagem de corrente na direção radial é $R = \Re/A = \Re/2\pi aL$ ohms.

Exemplo: Uma membrana neuronal pode ser modelada como um condutor anular cilíndrico. Dado um pedaço de membrana na forma de um cilindro anular com raio interno a, espessura b, comprimento L e corrente fluindo radialmente através do anel, calcule a resistência do pedaço de membrana.





Suponhamos que a corrente total passando por uma casca anular de raio z (z está entre a e $a + b$) seja I. Então, a densidade de corrente na direção radial em z vale $J = I/(2\pi zL)$. Substituindo na lei de Ohm ($J = \sigma E$):

$$\frac{I}{2\pi zL} = -\sigma \frac{dV}{dz} .$$

Separando as variáveis e integrando:

$$\int_a^{a+b} \frac{I}{2\pi zL} dz = -\sigma \int_{V(a)}^{V(a+b)} dV'(z) .$$

O cálculo das integrais nos dá:

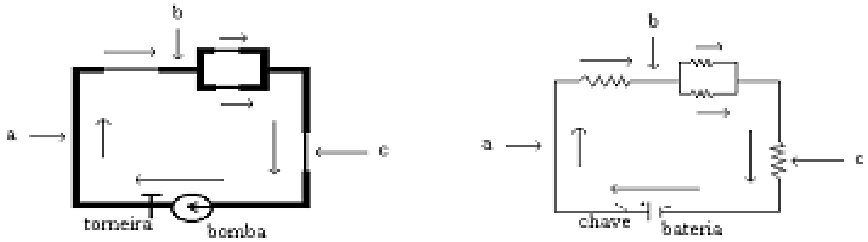
$$\frac{I}{2\pi L} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) = -\sigma\big(V(a+b) - V(a)\big) = \sigma V \Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

onde definiu-se $V = V(a) - V(a + b)$. Note que se o anel for muito fino ($b<<a$), $\ln(1+b/a) \approx b/a$ e $R = \rho b/(2\pi aL) = \Re /(2\pi aL)$.

- **Circuitos Elétricos**

Boa parte do entendimento sobre o fluxo de correntes elétricas em circuitos pode ser feito através de analogias hidráulicas. As principais analogias são as seguintes (veja a figura abaixo):

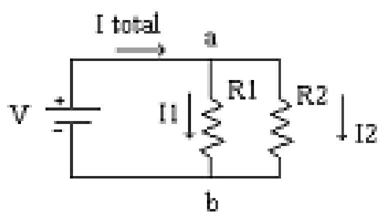
- Uma fonte de energia é necessária para a corrente fluir: bomba d'água no caso hidráulico e bateria no caso elétrico;
- Nem a água nem a corrente elétrica são criadas ou perdidas dentro do sistema: o fluxo em a, b e c é o mesmo no circuito hidráulico e a corrente elétrica é a mesma em a, b e c no circuito elétrico;
- Existem resistências ao fluxo de corrente: tubos finos no caso hidráulico e resistências elétricas no caso elétrico;
- A pressão no caso hidráulico é análoga ao potencial elétrico no caso elétrico: pressão = resistência do tubo x fluxo e voltagem = resistência elétrica x corrente elétrica.



Para circuitos elétricos, as chamadas **leis de Kirchoff** são válidas:

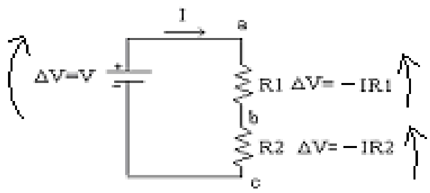
1. A soma algébrica das correntes em cada nó do circuito deve ser zero (as correntes que entram no nó são positivas e as que saem são negativas). Esta lei expressa a conservação da carga no circuito.

   Para o nó a: $I_{total} - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_{total} = I_1 + I_2$.

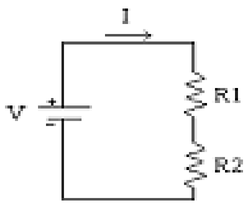


2. A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao longo de um circuito fechado é igual a zero. Esta lei expressa a conservação da energia no circuito.

   $V - IR_1 - IR_2 = 0 \Rightarrow V = IR_1 + IR_2$.

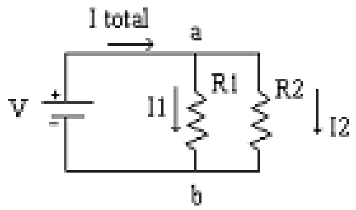


Esta última expressão nos permite deduzir uma fórmula para o cálculo do *resistor equivalente* a uma associação de resistores em série. Seja o circuito abaixo, em que R_1 e R_2 estão ligados em série.



Temos que $V = IR_1 + IR_2 \Rightarrow I = V/(R_1 + R_2) = V/R_{eq}$, onde $R_{eq} = R_1 + R_2$.

Seja agora o circuito abaixo, em que R_1 e R_2 estão ligados em paralelo.



A diferença de potencial entre os caminhos por R_1 e por R_2 é a mesma, igual a V. As correntes pelos dois resistores são: $I_1 = V/R_1$ e $I_2 = V/R_2$. Aplicando a 1ª lei de Kirchoff ao nó a: $I_{total} = I_1 + I_2 = V/R_1 + V/R_2 = V(1/R_1 + 1/R_2) = V/R_{eq}$, onde $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$, ou $R_{eq} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

De maneira geral, para um número n qualquer de resistores em série:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n .$$

Já para um número n qualquer de resistores em paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_n} ,$$

de forma que a condutância total para o caso dos resistores em paralelo é:

$$G_{\text{total}} = G_1 + G_2 + G_3 + ... + G_n .$$

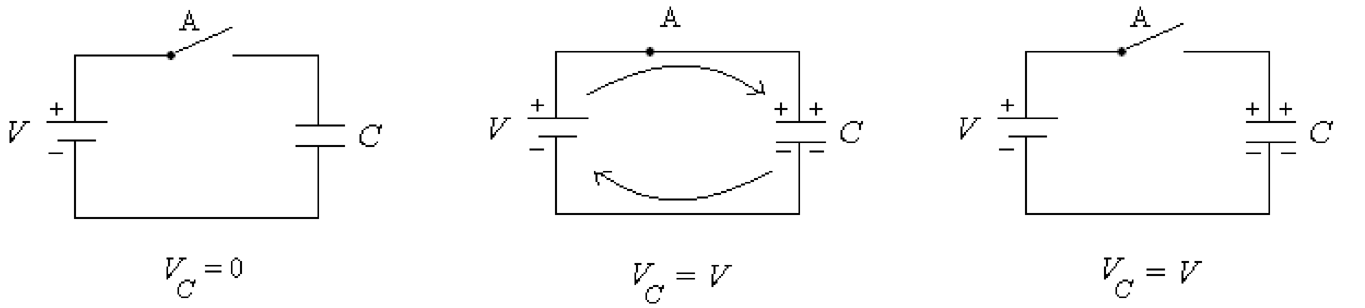
- **Capacitores**

Nos circuitos mostrados até o momento, a abertura ou o fechamento de uma chave provoca mudanças instantâneas na corrente e no potencial. Os capacitores introduzem o fator tempo quando se trata de circuitos elétricos.

Um **capacitor de placas paralelas** consiste de duas placas condutoras, planas e iguais, separadas por um isolante. A figura a seguir ilustra o que acontece quando se conecta um capacitor em série com uma bateria de voltagem *V*.

Na situação idealizada da figura, em que o circuito não tem resistência, quando a chave A é fechada ocorre um deslocamento instantâneo de cargas para as placas do capacitor, carregando-o a uma voltagem *V*.

Uma das placas fica com excesso de carga positiva *Q* e a outra fica com excesso de carga negativa −*Q*. Após o carregamento do capacitor não há mais corrente porque ela não pode passar pelo isolante.

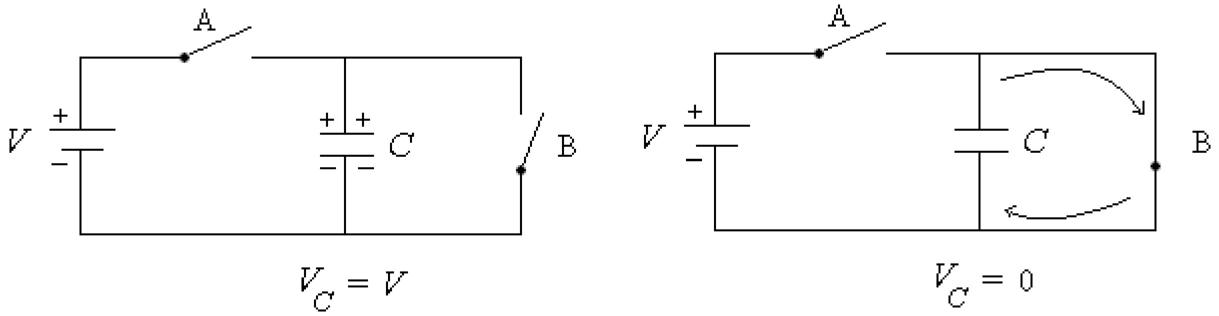


A **capacitância** (*C*) de um capacitor é definida como sendo a quantidade de carga que ele pode armazenar por cada volt aplicado a ele:

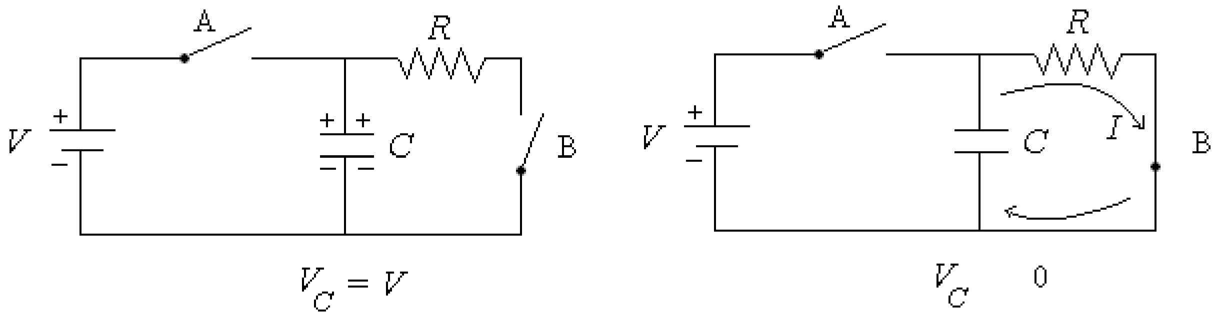
$$C = \frac{Q}{V}$$ (A unidade de capacitância é o farad, F = C/V).

Desta forma, a carga armazenada no capacitor da figura acima é $Q = CV$, onde *V* é a voltagem aplicada entre as suas placas.

Um capacitor pode ser descarregado através de um circuito colocado em paralelo com ele com uma chave (chave B na figura abaixo). Quando a chave é fechada, o fluxo de corrente é instantâneo e a carga no capacitor retorna a zero (note que a chave A permanece aberta).



Se colocarmos um resistor no circuito de descarga, esta não será mais instantânea, mas levará um certo tempo para ocorrer totalmente (veja a figura a seguir).



Para uma voltagem *V* aplicada ao capacitor, a máxima corrente que pode passar pelo circuito de descarga é $I = V/R$. Quanto maior *R*, menor a corrente e maior o tempo de descarga total.

A taxa de descarga do capacitor, d*q*/d*t*, é igual em módulo à corrente:

$$\frac{dq}{dt} = -I = -\frac{V}{R},$$

onde o sinal negativo indica que a carga do capacitor decresce no tempo.

A voltagem *V* entre as placas do capacitor é, inicialmente, igual à voltagem da bateria e depois decresce à medida que ele é descarregado. Como $q = CV$ e *C* é uma constante,

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow -\frac{V}{R} = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{V}{RC}$$

A equação acima diz que a taxa de perda de voltagem pelo capacitor é proporcional à voltagem restante. A constante de proporcionalidade é $1/RC$. Notem que ela tem dimensão de t^{-1}.

Como a grandeza RC tem dimensão de tempo, ela é chamada de constante de tempo do circuito, denotada por τ.

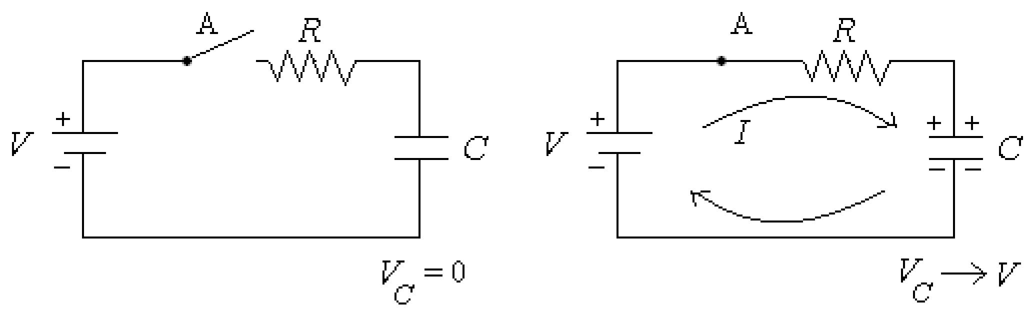
A solução da equação diferencial dando a variação de V com o tempo pode ser obtida pelo método de separação de variáveis:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln V\Big|_{V_0}^{V} = -\frac{1}{RC} t\Big|_0^t \Rightarrow \ln\frac{V}{V_0} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{V}{V_0} = e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau}.$$

O valor de V_0 (obtido fazendo-se $t = 0$) é o valor inicial da voltagem através do capacitor. Esta equação descreve o decaimento no tempo da voltagem através do capacitor, a partir do seu valor inicial. Note que este decaimento é exponencial e quanto menor τ (ou RC) mais pronunciada é a queda.

Para o caso oposto ao visto acima, em que um capacitor é carregado, temos um circuito em que o resistor é ligado em série entre a bateria e o capacitor.



Aplicando a 2ª lei de Kirchoff ao circuito acima temos,

$$V - RI - \frac{q}{C} = 0.$$

Como $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$,

$$V = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}.$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método da variável auxiliar: Define-se uma variável auxiliar u tal que $u = -q/C + V$. Diferenciando, temos que $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}q/C \Rightarrow \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = -C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Substituindo na equação acima, temos uma equação diferencial para u, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -(1/RC)u$. Esta equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, já visto acima para resolver a equação $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -(1/RC)V$. Como as duas equações são formalmente idênticas, as suas soluções também o serão. Então, a solução da equação para u é

$$u = u_0 e^{-t/RC}.$$

Voltando agora à variável q (escrevendo u em termos de q): $-q/C + V = (-q_0/C + V)e^{-t/RC}$. Notando que $q_0 = 0$, pois a carga inicial do capacitor é nula, temos que $-q/C + V = Ve^{-t/RC}$ e, finalmente,

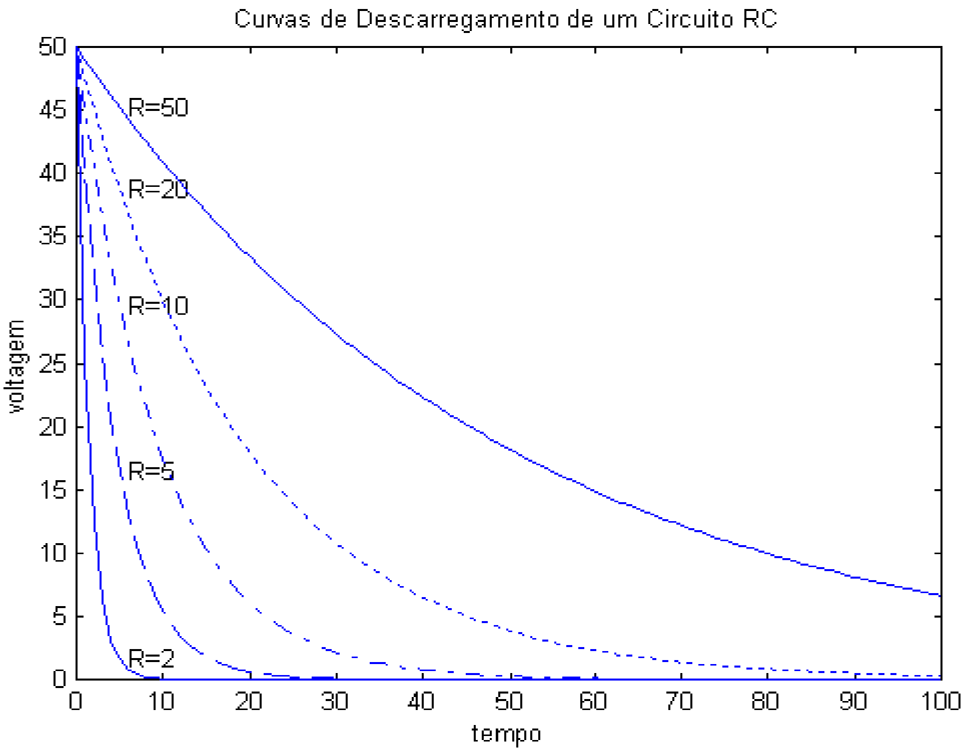
$$q = CV\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

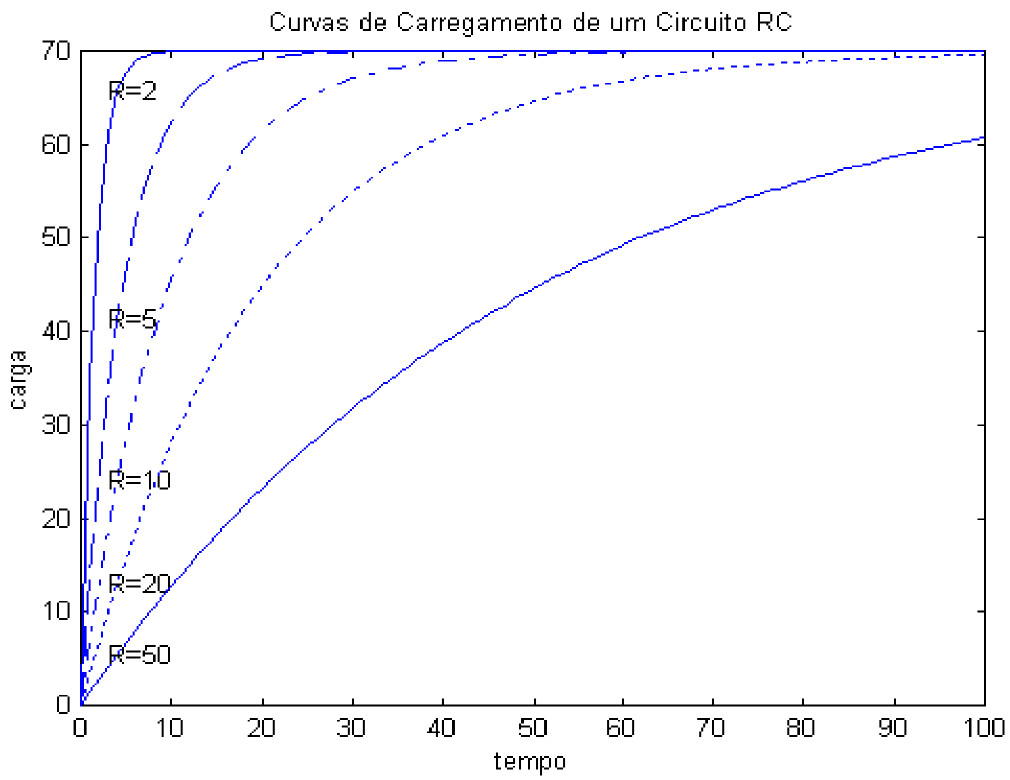
Esta é a equação que descreve o processo de carregamento de um capacitor, de zero à carga máxima $Q = CV$. Note que o processo de carregamento também segue uma lei exponencial com constante temporal dada por $\tau = RC$. A equação acima pode ser escrita em termos da voltagem através do capacitor como

$$V = V_B\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

onde V é agora a voltagem através do capacitor e V_B é a voltagem da bateria.

Os gráficos abaixo mostram curvas de descarregamento e carregamento de um circuito RC para diferentes valores de R (e um mesmo valor de $C = 1$, em unidades arbitrárias).


Curvas de Descarregamento de um Circuito RC
voltagem
tempo
R=50
R=20
R=10
R=5
R=2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
60
70
80
90
100


Curvas de Carregamento de um Circuito RC
carga
tempo
R=2
R=5
R=10
R=20
R=50
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100